

Solving Perfect Matching Problems with Side Constraints

Elena Fernández

Statistics and Operations Research Department
Technical University of Catalonia
Pau Gargallo, 5. 08028 Barcelona. Spain
E.Fernandez@upc.es

Oscar Meza

Computer Science and Information Technology Department
Simón Bolívar University
Apartado 89.000. Baruta. Venezuela
meza@ldc.usb.ve

ABSTRACT

The minimum weight perfect matching problem is one of the best-known Combinatorial Optimization problems. From both the combinatorial and the polyhedral point of view, odd cycles are the elements that permit to derive efficient algorithms to solve this problem, by identifying blossoms in the first case or by generating valid inequalities that eliminate extreme points associated to odd cycles in the second case. Unfortunately, when side constraints are added most of the structural properties of the underlying combinatorial problem are lost. Now it is also possible that even cycles be associated to some extreme points of the corresponding polytope.

In this work we study two different types of graphs that contain even cycles and, possibly, some chords. The objective is to analyze some properties of these types of graphs that can be used to solve perfect matching optimization problems when side constraints are posed. In particular, we obtain the maximum number of edges of certain classes that can occur in the solutions to the considered problems. Finally, we examine the application of the obtained results within two different algorithmic frameworks: we present a class of valid inequalities that can be considered in cutting plane algorithms and we sketch a possible enumerative scheme.

Keywords: combinatorial optimization algorithms, perfect matchings in graphs, linear programming.

RESUMEN

Encontrar un apareamiento perfecto de costo mínimo en un grafo es uno de los problemas de Optimización Combinatoria más conocidos. Tanto desde el punto de vista combinatorio, como el relacionado con poliedros, los ciclos impares son los elementos que permiten derivar algoritmos eficientes para resolver este problema, mediante la identificación de "blossoms" en el primer caso, o mediante la generación de desigualdades válidas que eliminan puntos extremos asociados a ciclos impares en el Segundo caso. Desafortunadamente, cuando incorporamos nuevas restricciones al problema, muchas propiedades estructurales del mismo se pierden. Puede ocurrir ahora que algunos puntos extremos del politopo correspondiente estén asociados a ciclos pares.

En este trabajo estudiamos dos clases de grafos que contienen ciclos pares y posiblemente algunas cuerdas. El objetivo es analizar algunas propiedades de estas clases de grafos que puedan ser utilizadas para resolver problemas de apareamiento perfecto de costo mínimo con restricciones adicionales. En particular, se obtiene el máximo número de aristas de un cierto tipo que pueden aparecer en las soluciones de los problemas considerados. Finalmente, se discute la aplicación de los resultados obtenidos en dos contextos algorítmicos diferentes: presentamos una clase de desigualdades válidas que pueden ser incorporadas en algoritmos de planos de corte y proponemos un esquema enumerativo.

Palabras claves: algoritmos en optimización combinatoria, apareamientos perfectos en grafos, programación lineal.